



محمود نصیری

تفکر هندسی و مفاهیم هندسی

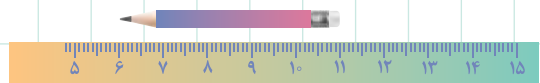
مقدمه

در این سلسله مقاله‌ها سعی در اشاعه مفاهیم و تفکر هندسی داریم و می‌کوشیم مخاطبان مجله را با ساختار هندسه و مفاهیم‌های اولیه آن آشنا کنیم. این مجموعه مخصوص دانش‌آموزی است که در دوران ابتدایی تا حدودی با مفاهیم‌های هندسه به‌طور شهودی و غیرمستقیم آشنا شده است. در شماره قبل با مفاهیم‌های نقطه، خط و صفحه آشنا شدیم. همچنین پاره‌خط و نیم‌خط را تعریف کردیم. اکنون در این بخش اندازه پاره‌خط و هم‌نهستی دو پاره‌خط را تعریف می‌کنیم.

اندازه‌گیری پاره‌خط‌ها

فرض کنید خط‌کشی داریم که عددهای کمتر از ۵ روی آن پاک شده‌اند (شکل ۱). می‌خواهیم طول مدادی را با آن اندازه بگیریم. چگونه این کار را انجام می‌دهید؟
 نوک مداد را روی عدد ۶ قرار می‌دهیم. اگر انتهای مداد روی عدد ۱۱ قرار گیرد، طول مداد چقدر است؟

شکل ۱



حال فرض کنید خط d خودش یک خط‌کش باشد که صفر آن روی نقطه O است و از سمت راست O عددهای مثبت را نشانه‌گذاری کرده باشیم (شکل ۲). سپس از O به سمت چپ همان عددها را با همان مقیاس اندازه‌گیری اما با علامت منفی قرار داده باشیم. در این صورت یک خط‌کش فرضی ساخته‌ایم.



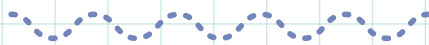
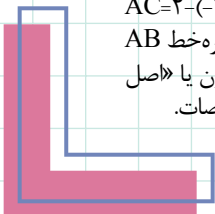
شکل ۲

هریک از عددها را مختص‌های نقطه‌های نشانه‌گذاری شده می‌نامیم. مثلاً مختص نقطه A عدد ۲ و مختص نقطه B عدد ۴ و مختص نقطه C برابر ۲- است.

حال می‌توانیم فاصله هر دو نقطه دلخواه روی خط AB را پیدا کنیم. مثلاً فاصله دو نقطه A و B برابر است با: $2 - (-2) = 4$. این فاصله را به AB نشان می‌دهیم. پس برای تعیین فاصله بین دو نقطه همواره مختص نقطه‌ای را که عددش بزرگ‌تر است، منهای مختص نقطه‌ای که عددش کمتر است می‌کنیم:

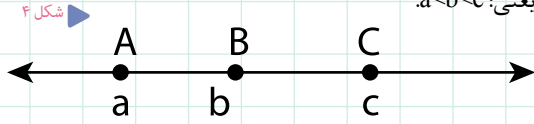
$$AC = 2 - (-2) = 4 \quad \text{یا} \quad CD = -2 - (-4) = 2$$

این فاصله دو نقطه A و B ، یعنی AB را اندازه پاره‌خط AB می‌نامیم. بنابراین می‌توانیم قانونی را به نام قانون یا «اصل خط‌کش» بیان کنیم؛ یعنی تبدیل خط به محور مختصات.

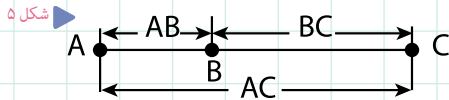


اکنون به کمک مفهوم مختص نقطه یا فاصله بین دو نقطه می‌توانیم مفهوم بین بودن یا بینیت را در هندسه تعریف کنیم.

۱ اگر A ، B و C سه نقطه روی یک خط باشند و آن خط را به محور تبدیل کرده باشیم، گوییم نقطه B بین دو نقطه A و C است، هرگاه مختص B بین مختص‌های A و C باشد (شکل ۴)؛ یعنی: $a < b < c$.



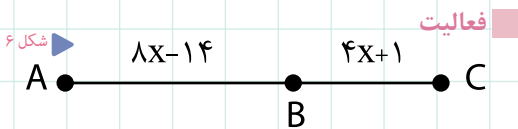
۲ اگر A ، B و C سه نقطه روی یک خط باشند، گوییم نقطه B بین دو نقطه A و C است، هرگاه: $AB + BC = AC$ (شکل ۵).



یعنی فاصله بین A و B به علاوه فاصله بین B و C برابر فاصله بین A و C باشد. وقتی B بین A و C واقع باشد، آن را به صورت $A-B-C$ یا $C-B-A$ (تفاوتی ندارد)، می‌نویسیم. این ویژگی «جمع اندازه پاره‌خطها» نیز نامیده می‌شود.

مثال: تهران، کرج و قزوین را روی یک خط در نظر می‌گیریم. اگر فاصله تهران تا کرج ۴۰ کیلومتر و فاصله تهران تا قزوین ۱۵۰ کیلومتر باشد، فاصله کرج تا قزوین چند کیلومتر است؟
 اکنون تا اینجا با دو مفهوم پاره‌خط و اندازه پاره‌خط آشنا شدیم. پاره‌خط AB مجموعه‌ای از نقطه‌هاست، شامل نقطه‌های A و B و همه نقطه‌های خط AB که بین A و B واقع‌اند و آن را به AB نشان می‌دهیم.

اندازه پاره‌خط AB فاصله بین دو نقطه A و B است و یک عدد مثبت یا صفر است. این عدد را به AB نشان می‌دهیم.



اگر فاصله بین دو نقطه A و C برابر ۵۹ و فاصله بین A و B برابر $8x - 14$ و فاصله بین B و C برابر $4x + 1$ باشد، چگونه x را پیدا می‌کنید؟ (شکل ۶) ویژگی بین بودن یا همان ویژگی جمع اندازه پاره‌خطها را چگونه می‌نویسید؟

هم‌نهشتی دو پاره‌خط

با تعریف خود پاره‌خط و اندازه پاره‌خط آشنا شدیم. حال می‌خواهیم یکی از مهم‌ترین مفاهیم هندسه را که هم‌نهشتی یا انطباق دو پاره‌خط است، تعریف کنیم.

وقتی می‌گوییم دو پاره‌خط AB و CD هم‌نهشت یا قابل انطباق‌اند، به‌طور شهودی این‌گونه تصور می‌کنیم که اگر پاره‌خط CD روی پاره‌خط AB چنان واقع شود که مثلاً C روی A قرار گیرد، آن‌گاه اگر D هم روی B قرار گرفت، گوییم

هر نقطه روی یک خط می‌تواند به عددی نظیر شود که این عدد را مختص آن نقطه می‌نامیم. هر عدد یا مختص نیز نشان‌دهنده یک نقطه روی خط است. در این صورت گوییم خط را به محور تبدیل کرده‌ایم.

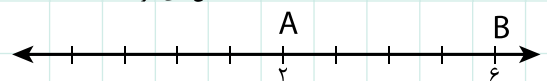
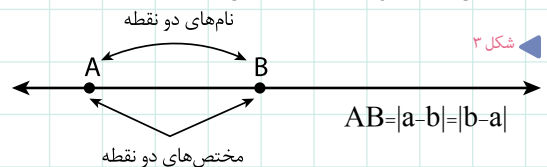
اگر A و B دو نقطه باشند و خط شامل این دو نقطه را به محور تبدیل کرده باشیم، فاصله بین دو نقطه A و B ، حاصل تفاضل مختص‌های آن است که با علامت مثبت در نظر گرفته می‌شود. یعنی دو مختص را از هم کم می‌کنیم. اگر عدد حاصل مثبت باشد که خودش فاصله بین دو نقطه است. اگر هم منفی شود، آن را در یک منفی ضرب می‌کنیم تا مثبت شود و در این صورت فاصله بین دو نقطه است. اگر حاصل صفر شود، در این صورت گوییم فاصله دو نقطه صفر است و دو نقطه یکی هستند؛ یعنی روی هم واقع‌اند.

تمامی آنچه را که در بالا بیان کردیم، می‌توانیم با یک نماد یا علامت بیان کنیم. اگر a و b دو عدد و مختص‌های دو نقطه A و B باشند، آن‌گاه $a - b$ یا $b - a$ را محاسبه می‌کنیم و هر دو را درون دو علامت قائم به‌صورت $|a - b|$ یا $|b - a|$ قرار می‌دهیم. این نماد را نماد «قدر مطلق» می‌نامند.

حاصل داخل این نماد اگر مثبت شد خودش را می‌نویسیم، اما اگر منفی شد در یک منها ضرب می‌کنیم و می‌نویسیم. مثلاً: $3 - 2 = 1$ ؛ اما: $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$ و $0 - 5 = -5$ ؛ اما: $0 - (-5) = 5$.

پس برای تعیین فاصله دو نقطه، وقتی مختص‌های آن دو نقطه را داشته باشیم، تفاوتی نمی‌کند کدام مختص را از کدام مختص کم کنیم. در پایان حاصل همواره مثبت یا صفر است. یعنی فاصله دو نقطه عددی مثبت یا صفر است.

اکنون می‌توانیم اندازه یک پاره‌خط را تعریف کنیم. اگر A و B دو نقطه روی یک خط باشند و آن خط را به محور تبدیل کرده باشیم، $|a - b|$ یا $|b - a|$ را فاصله دو نقطه A و B می‌نامیم و a و b مختص‌های A و B هستند (شکل ۳).



$$AB = |6 - 2| = 4 \text{ یا } AB = |2 - 6| = |-4| = 4$$

اکنون فرض کنیم A و B دو نقطه دلخواه روی یک خط باشند. در این صورت صفر خط‌کش را روی نقطه A قرار می‌دهیم. نقطه B روی هر عددی از خط‌کش واقع شود، آن عدد را فاصله بین دو نقطه A و B می‌نامیم و به AB نشان می‌دهیم.

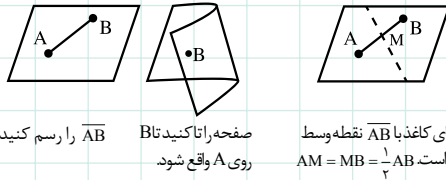
با توجه به آنچه در بالا توضیح دادیم، اگر هر عدد خط‌کش را نیز روی A قرار دهیم و این عدد برابر a باشد و نقطه B روی عددی مانند b از خط‌کش واقع شود، در این صورت نیز داریم:

$$AB = |b - a| = |a - b|$$

اگر A و B دو نقطه انتهایی یک پاره‌خط باشند، آن‌گاه فاصله بین A و B را اندازه پاره‌خط AB تعریف می‌کنیم و به AB نشان می‌دهیم.

پاره خط AB را روی یک صفحه کاغذ رسم کنید. کاغذ را چنان تا کنید تا نقطه B روی نقطه A واقع شود.
 دوباره صفحه کاغذ را باز کنید. نقطه A کاغذ را روی پاره خط علامت بزنید و آن را M بنامید. نقطه M وسط پاره خط AB است (شکل ۱۰).

شکل ۱۰



اثر تای کاغذ با نقطه وسط AB است $AM = MB = \frac{1}{2} AB$

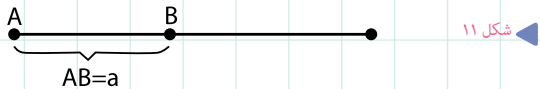
فعالیت

نقطه M وسط پاره خط AB است، به طوری که: $AM = 4x - 1$ و $MB = 3x + 3$. اندازه پاره خط AB را چگونه محاسبه می کنید؟ ابتدا سعی کنید x را محاسبه کنید.
 نقطه M روی خط d مفروض است، چند نقطه روی خط d وجود دارند که از M به فاصله ۵ باشند؟ در این صورت این نقطه یا نقطه‌ها چه رابطه‌ای با M دارند؟
 حال یک نیم خط را در نظر بگیرید. چند نقطه روی این نیم خط وجود دارند، به طوری که فاصله‌شان از نقطه ابتدای پاره خط برابر ۵ باشد.

آیا تعریف زیر برای نقطه وسط یک پاره خط درست است؟
 M وسط پاره خط AB است، هرگاه: $AM = MB$. چرا؟
 اگر A و B دو نقطه روی خط d باشند، به طوری که $AB = 6$. اگر M هر نقطه‌ای روی خط d باشد که: $AM + MB = 6$ ، آن گاه M چه ویژگی‌ای دارد؟ آیا M نقطه‌ای از AB است؟ اگر: $MA + MB > 6$ ، M کجای خط AB واقع است؟

ساختن پاره خطی هم‌نهشت با پاره خط مفروض

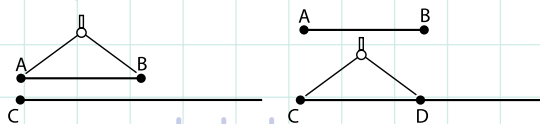
در زمان اقلیدس ریاضی دانان هنوز عددهای حقیقی را به طور کامل نمی شناختند. بنابراین چیزی به عنوان محور عددها شناخته شده نبود. به همین دلیل اقلیدس مفهوم اندازه پاره خط را به صورتی که امروزه ما به کار می بریم، نمی توانست به کار ببرد. بنابراین برای ساختن پاره خطی هم‌نهشت با هم اندازه با پاره خط دیگر، اصلی را بیان کرد. اما ما در ساختن هندسه از تبدیل خط به محور استفاده کردیم و بنابراین به سادگی می توانیم از عددهای متناظر اندازه پاره خطها، پاره خطی هم‌اندازه با پاره خط دیگر رسم کنیم.
 اگر a عددی مثبت باشد، آن گاه روی یک نیم خط با ابتدای A ، یک و فقط یک نقطه B وجود دارد که: $AB = a$ (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

با استفاده از این ویژگی می توانیم روی هر نیم خط پاره خطی هم‌نهشت با پاره خط معلومی بسازیم.
 این همان مفهومی است که اقلیدس بیان می کرد: هر پاره خطی را می توانیم به اندازه پاره خط مفروضی امتداد دهیم (شکل ۱۲).

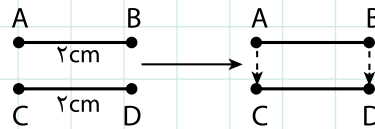
شکل ۱۲



دو پاره خط هم‌نهشت یا قابل انطباق اند؛ یعنی می توانند بر هم منطبق شوند.
 گوییم اگر دو پاره خط اندازه‌های برابر داشته باشند، آن گاه هم‌نهشت اند. پس می توانیم هم‌نهشتی دو پاره خط را به صورت زیر تعریف کنیم:

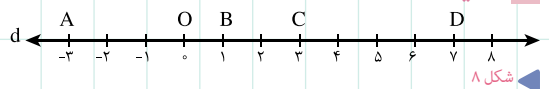
پاره خط AB را با پاره خط CD هم‌نهشت یا قابل انطباق گوییم: هرگاه: $AB = CD$ و چنین می نویسیم: $AB \cong CD$. می خوانیم پاره خط AB با پاره خط CD هم‌نهشت است. (شکل ۷)
 $AB = CD \leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$

شکل ۷



توجه داشته باشیم که مفهوم هم‌نهشتی یکی از مفهومی‌های اساسی در هندسه است که نه تنها بین پاره خطها، بلکه بین هر دو شکل هندسی می تواند مطرح شود. اینکه چگونه این **برهم‌نهشی** دو شکل صورت می گیرد، یکی از بحث‌های بسیار مهم هندسه به نام «تبدیل» هاست؛ یعنی تبدیل یک شکل به شکل دیگر که در بخش‌های بعدی یکی از مهم‌ترین بحث‌های ما است.

فعالیت

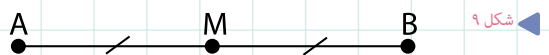


شکل ۸

در شکل ۸ مختص‌های A, B, C, D نشان داده شده‌اند. AB و CD را محاسبه کنید. آیا: $AB \cong CD$ ؟ چرا؟
 آیا $AC \cong BD$ ؟ BC و CD را محاسبه کنید. آیا BC با CD هم‌نهشت است؟ چرا؟ آیا رابطه $CD > BC$ درست است؟ این مقایسه دو پاره خط است. برای اینکه دو پاره خط را از نظر بزرگ‌تری یا کوچک‌تری مقایسه کنیم، اندازه‌های آن‌ها را با هم مقایسه می کنیم. کدام نقطه بین دو نقطه دیگر است؟ رابطه بین بودن را بین آن‌ها تحقیق کنید.
 آخرین مفهومی که در مورد پاره خط بیان می کنیم، نقطه وسط پاره خط است.

نقطه وسط پاره خط

نقطه‌ای روی پاره خط که آن را به دو پاره خط با اندازه‌های برابر تقسیم می کند، نقطه وسط پاره خط می نامند.
 نقطه‌ای روی پاره خط که آن را به دو پاره خط هم‌نهشت تقسیم می کند، نقطه وسط آن پاره خط می نامند.



شکل ۹

M نقطه وسط AB است (شکل ۹).
 $AM = MB$ یا $\overline{AM} \cong \overline{MB}$